

Б.18

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт

В.Н.Байер, В.М.Галицкий

**излучение двух фотонов при
электронных столкновениях**

НОВОСИБИРСК 1965

АННОТАЦИЯ

В системе центра инерции вычислено сечение двойного тормозного излучения при столкновении электронов больших энергий, проинтегрированное по всем конечным состояниям кроме частот фотонов, в предположении, что один из излученных фотонов является мягким, а второй обладает произвольной энергией.

TWO PHOTON EMISSION IN ELECTRON COLLISIONS

A B S T R A C T

Double bremsstrahlung cross section in the high energy electron-electron collision is calculated. This cross section is integrated over all final states, with the exception of photon frequencies. In the calculation assumption is made, that one of the photons is soft and another possess arbitrary energy.

I. Для опытов на встречных пучках значительный интерес представляет процесс двойного тормозного излучения, т.е. процесс, в котором столкновение электронов, или электрона и позитрона сопровождается излучением двух фотонов. Этот процесс может быть использован в качестве монитора для регистрации столкновения пучков. Повидимому наиболее простой является такая схема опыта, в которой регистрируются кванты разлетающиеся в противоположные стороны. При такой постановке эксперимента процесс двойного тормозного излучения конкурирует с процессом двухквантовой аннигиляции (в случае электрон-позитронных столкновений). В случае больших энергий электронов и при достаточно широком интервале частот регистрируемых фотонов, сечение этого процесса может превышать сечение двухквантовой аннигиляции. Это связано с тем, что сечение двойного тормозного излучения, в отличие от сечения двухквантовой аннигиляции, не падает с ростом энергии сталкивающихся частиц.

Использование двойного тормозного излучения в качестве монитора требует знания теоретических формул для сечения этого процесса с достаточной степенью точности. Учитывая, что излучение фотонов происходит в основном в угол порядка $\frac{1}{\gamma}$, что при больших энергиях значительно меньше угловых размеров счётчиков, ясно, что интерес представляет сечение проинтегрированное по углам вылета фотонов. Поскольку электроны в конечном состоянии не регистрируются, необходимо также выполнить интегрирование по их конечным состояниям. Полученная таким образом величина будет представлять собой дифференциальное по частотам обоим квантам сечение двойного тормозного излучения -

Расчёт этого сечения для случая излучения классических квантов ($\omega_1, \omega_2 \ll \varepsilon$) проведен в работе [1]. В настоящей работе вычислено сечение двойного тормозного излучения в системе центра инерции сталкивающихся частиц в предположении, что только один из излучаемых фотонов является мягким, а второй обладает произвольной энергией. Предполагается, что энергия электронов велика, так что может быть проведено разложение по обратным степеням γ . В работе вычислен старший член этого разложения и дана оценка поправочных членов. Получены также формулы, полезные для расчёта сечений различных процессов с участием фотонов. В качестве примера в работе с логарифмической точностью найдено сечение однократного тормозного излучения при электрон-электронном и электрон-позитронном столкновении.

2. Указанная выше постановка вопроса естественно определяет выбор диаграмм. Действительно, так как существенны малые углы рассеяния, а каждый электрон излучает в узкий конус с углом порядка $1/\gamma$, наибольший вклад в сечение дают диаграммы, отвечающие излучению квантов разными частицами. Из общего числа 40 диаграмм только 16 принадлежат указанному классу. Из них 8 диаграмм отвечают процессу рассеяния, а 8 диаграмм аннигиляционного типа в случае рассеяния электрона на позитроне и обменного типа в случае рассеяния электрона на электроне. При излучении не слишком жёстких фотонов, передаваемый импульс на аннигиляционных диаграммах имеет порядок квадрата начальной энергии, поэтому вклад этих диаграмм мал.

Диаграммы обменного типа дают такой же вклад, как и диаграммы прямого рассеяния. Интерференционные члены между обменными и необменными диаграммами малы. В силу тождественности электронов, суммарный вклад прямых и обменных диаграмм

тавшихся 8 диаграмм мы можем рассматривать только 4, изображенные на рис.1. Действительно, 4 других диаграммы получаются из диаграмм рис. 1 перестановкой фотонов. Вклады

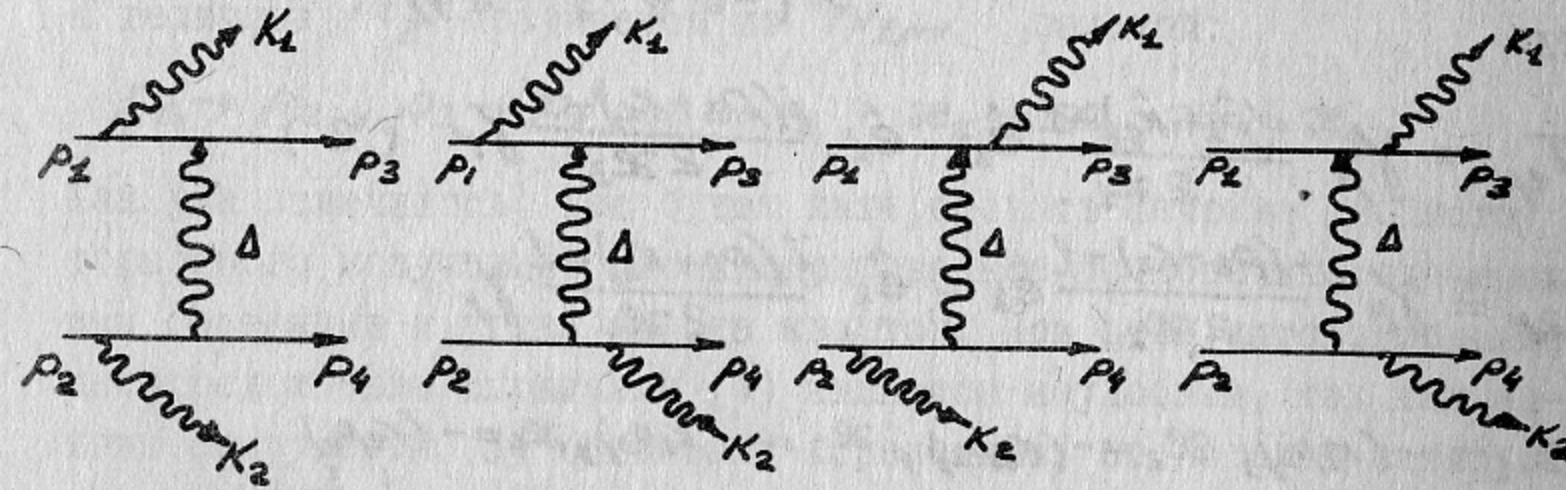


рис.1

диаграмм первого и второго типов равны, а в силу тождественности фотонов их сумму следует разделить на 2. Так как конуса, в которые излучаются фотоны практически не перекрываются,

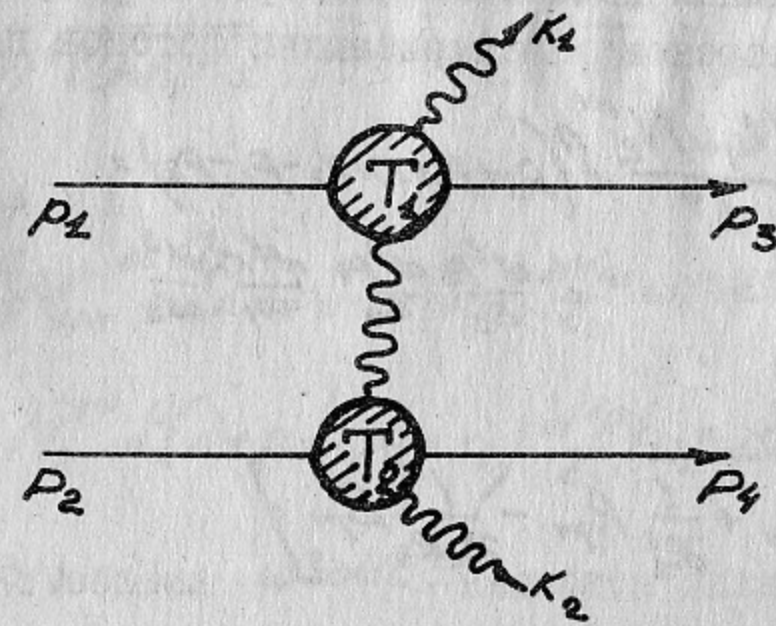


рис.2

то интерференционный член между диаграммами первого и второго типов мал. Роль отброшенных диаграмм в качестве поправочных

- $d\Omega_1 d\Omega_2$, где ω_1 есть частота фотона, излученного в направлении I, а ω_2 - частота кванта излученного в направлении 2, противоположном направлению I.

Расчёт этого сечения для случая излучения классических квантов ($\omega_1, \omega_2 \ll \varepsilon$) проведен в работе [1]. В настоящей работе вычислено сечение двойного тормозного излучения в системе центра инерции сталкивающихся частиц в предположении, что только один из излучаемых фотонов является мягким, а второй обладает произвольной энергией. Предполагается, что энергия электронов велика, так что может быть проведено разложение по обратным степеням γ . В работе вычислен старший член этого разложения и дана оценка поправочных членов. Получены также формулы, полезные для расчёта сечений различных процессов с участием фотонов. В качестве примера в работе с логарифмической точностью найдено сечение однократного тормозного излучения при электрон-электронном и электрон-позитронном столкновении.

2. Указанная выше постановка вопроса естественно определяет выбор диаграмм. Действительно, так как существенны малые углы рассеяния, а каждый электрон излучает в узкий конус с углом порядка $1/\gamma$, наибольший вклад в сечение дают диаграммы, отвечающие излучению квантов разными частицами. Из общего числа 40 диаграмм только 16 принадлежат указанному классу. Из них 8 диаграмм отвечают процессу рассеяния, а 8 диаграмм аннигиляционного типа в случае рассеяния электрона на позитроне и обменного типа в случае рассеяния электрона на электроне. При излучении не слишком жёстких фотонов, передаваемый импульс на аннигиляционных диаграммах имеет порядок квадрата начальной энергии, поэтому вклад этих диаграмм мал.

Диаграммы обменного типа дают такой же вклад, как и диаграммы прямого рассеяния. Интерференционные члены между обменными и необменными диаграммами малы. В силу тождественности электронов, суммарный вклад прямых и обменных диаграмм

следует разделить на 2. Это означает, что можно рассматривать только диаграммы соответствующие необменному рассеянию и не учитывать тождественности электронов. Поэтому полученные результаты будут одинаково справедливы для случая электрон-электронного и электрон-позитронного рассеяния. Из оставшихся 8 диаграмм мы можем рассматривать только 4, изображенные на рис. I. Действительно, 4 других диаграммы получаются из диаграмм рис. I перестановкой фотонов. Вклады

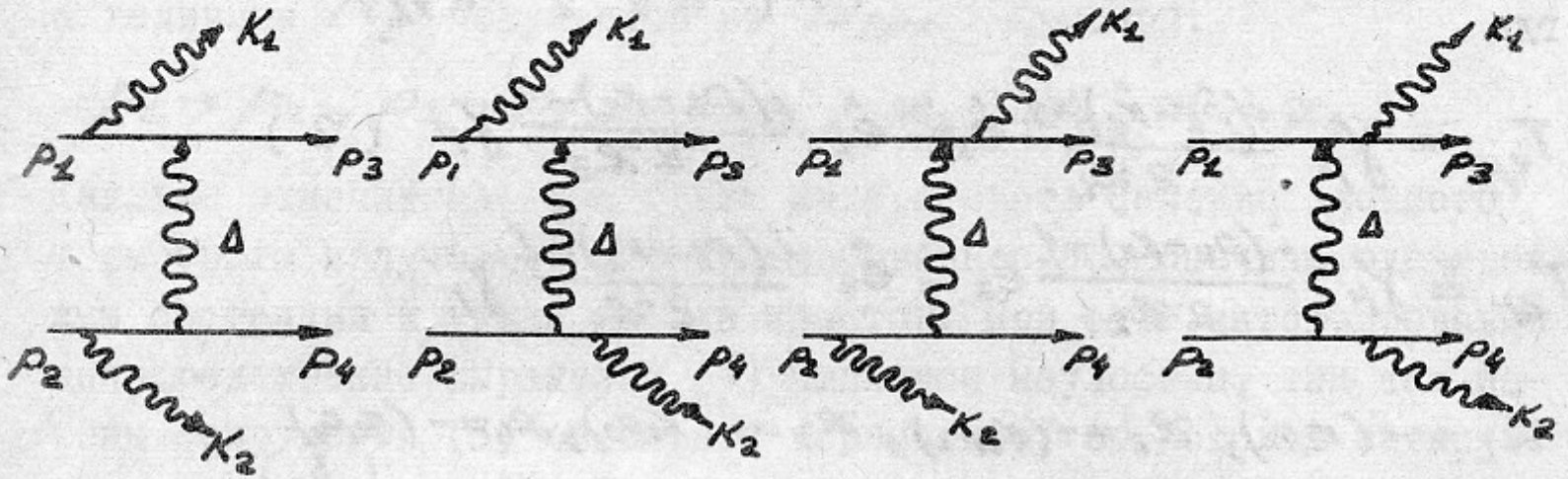


рис. 1

диаграмм первого и второго типов равны, а в силу тождественности фотонов их сумму следует разделить на 2. Так как конуса, в которые излучаются фотоны практически не перекрываются,

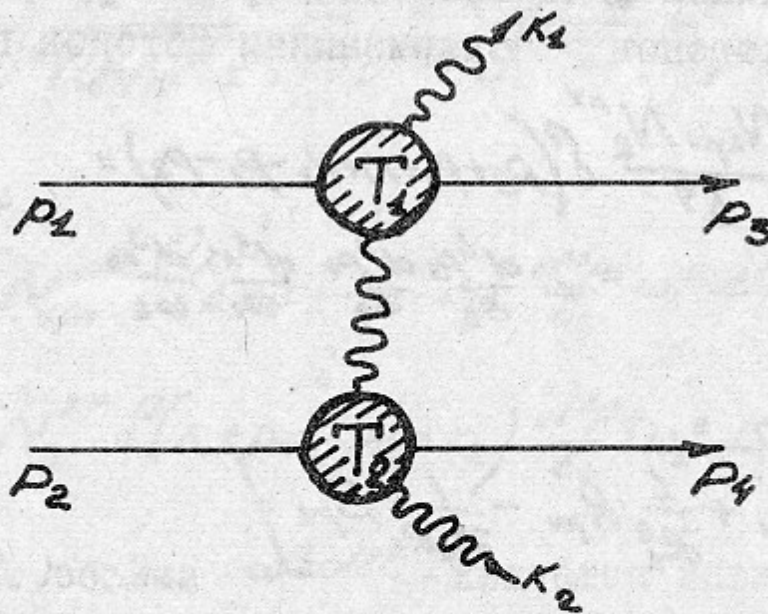


рис. 2

то интерференционный член между диаграммами первого и второго типов мал. Роль отброшенных диаграмм в качестве поправочных

членов будет обсуждена дальше.

Таким образом в дальнейшем будут рассматриваться четыре диаграммы, совокупность которых нам будет удобно изобразить в виде (рис.2). Матричный элемент, соответствующий этим 4 диаграммам имеет вид:

$$M = \frac{ie^4}{(2\pi)^5} \frac{1}{\sqrt{2\omega_1 2\omega_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \frac{1}{\Delta^2} (\bar{u}(p_3) T_{2\mu} u(p_4)) \times (1) \\ \times (\bar{u}(p_4) T_2^{\mu} u(p_2))$$

где

$$T_{2\mu} = \gamma_{\mu} \cdot \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) - 1}{2x_1} \hat{e}_1 - \hat{e}_1 \frac{i(p_3 + k_1) - 1}{2x_3} \gamma_{\mu} \quad (2)$$

$$T_2^{\mu} = \gamma_{\mu} \frac{i(p_2 - k_2) - 1}{2x_2} \hat{e}_2 - \hat{e}_2 \frac{i(p_4 + k_2) - 1}{2x_4} \gamma_{\mu}$$

$$x_1 = -(k_1 p_4), \quad x_2 = -(k_2 p_2), \quad x_3 = -(k_1 p_3), \quad x_4 = -(k_2 p_4) \quad (3)$$

$$\Delta = p_3 + k_1 - p_4 = p_2 - k_2 - p_4$$

Здесь и в дальнейшем используется метрика $(ab) = \vec{a}\vec{b} - a_0b_0$ и система единиц $\hbar = c = m = 1$.

Усредняя по спинам начальных электронов и суммируя по спинам конечных электронов и поляризациям фотонов получаем:

$$d\sigma = \frac{e^8}{4(2\pi)^8 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - 1}} \int \frac{N_{2\mu\nu} N_2^{\mu\nu}}{\Delta^4} \delta(p_3 + p_4 + k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \times (4) \\ \times \frac{d^3 p_3}{\varepsilon_3} \frac{d^3 p_4}{\varepsilon_4} \frac{d^3 k_1}{\omega_1} \frac{d^3 k_2}{\omega_2}$$

где

$$N_{2\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_3^2} Q_{\mu\nu} + \frac{1}{x_1^2} R_{\mu\nu} - \frac{1}{x_1 x_3} S_{\mu\nu} \right] \quad (5)$$

$$Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} [1 + x_3 - x_1 + (p_1 p_3) + x_1 x_3] - (p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{2\nu} p_{3\mu}) \\ + (x_3 - 1)(k_{1\mu} p_{2\nu} + k_{2\nu} p_{1\mu}) \quad (6)$$

$$R_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} \begin{pmatrix} k_1 \leftrightarrow -k_1 \\ p_1 \leftrightarrow p_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$S_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}(p_1 p_3) [\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 - (p_1 p_3) - 1] + 2\mathcal{E}_3 p_{\mu} p_{\nu} \quad (8)$$

$$- 2\mathcal{E}_1 p_{3\mu} p_{3\nu} + 2k_{\mu} k_{\nu} + (p_{\mu} p_{3\nu} + p_{\nu} p_{3\mu}) [2(p_1 p_3) + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1]$$

$$+ (p_{\mu} k_{\nu} + p_{\nu} k_{\mu})(p_1 p_3) - (p_{3\mu} k_{\nu} + p_{3\nu} k_{\mu})(p_1 p_3)$$

а величина $N_2^{\mu\nu}$ получается из $N_{1\mu\nu}$ заменой:

$$p_1 \rightarrow p_2, p_3 \rightarrow p_4, k_1 \rightarrow k_2, \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_4$$

Как уже отмечалось, нас будет интересовать сечение двойного тормозного излучения, проинтегрированное по конечным электронным состояниям и углам вылета квантов. При этом интегрирование непосредственно выражения (4) является неудобным, так как законы сохранения (3) связывают переменные, от которых зависят величины $N_{1\mu\nu}$ и $N_2^{\mu\nu}$. Поэтому целесообразно разделить интегрирование по конечным состояниям каждого электрона и излученного им фотона введя дополнительную δ -функцию. Тогда сечение (4) представится в виде:

$$d\sigma_{\omega_1 \omega_2} = \frac{4\alpha^4}{(2\pi)^4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - 1}} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1 \omega_2} \int \frac{d^4 \Delta}{\Delta^4} K_{1\mu\nu} K_2^{\mu\nu} \quad (9)$$

здесь

$$K_{1\mu\nu} = \int N_{1\mu\nu} \delta(\Delta + p_1 - p_3 - k_1) \frac{d^3 p_3}{E_3} \omega_1^2 d\Omega_1$$

$$K_2^{\mu\nu} = \int N_2^{\mu\nu} \delta(\Delta + p_4 - p_2 + k_2) \frac{d^3 p_4}{E_4} \omega_2^2 d\Omega_2 \quad (10)$$

Хотя элемент объёма $\omega^2 d\Omega$ является инвариантом, интегрирование по углам вылета фотона не ковариантно, вследствие инвариантности объёма интегрирования. Поэтому величины $K_{\mu\nu}$ зависят

от системы отсчёта, в которой фиксирована энергия кванта ω . Для того, чтобы записать их в ковариантном виде, введем 4-вектор n_μ , определенный так, что в интересующей нас системе отсчёта его компоненты равны $n_\mu = (0, 0, 0, 1)$.

Тогда тензор $K_{1\mu\nu}$ может быть выражен через три вектора — p_μ , Δ_μ , n_μ

Наиболее общий вид такого тензора:

$$K_{1\mu\nu} = c_1 g_{\mu\nu} + c_2 p_\mu p_\nu + c_3 \Delta_\mu \Delta_\nu + c_4 (p_\mu \Delta_\nu + p_\nu \Delta_\mu) \quad (11)$$

$$+ c_5 n_\mu n_\nu + c_6 (n_\mu \Delta_\nu + n_\nu \Delta_\mu) + c_7 (n_\mu p_\nu + n_\nu p_\mu)$$

аналогично записывается и тензор $K_2^{\mu\nu}$. Эти тензора являются калибровочно инвариантными, так что должно быть

$$K_{1\mu\nu} \Delta^\nu = K_{1\mu\nu} \Delta'^\nu = 0 \quad (12)$$

поэтому только 4 из функций c_i являются независимыми. Для того, чтобы найти эти 4 функции, необходимо вычислить четыре ковариантных интеграла, которые мы определим следующим образом:

$$J_1 = g^{\mu\nu} K_{1\mu\nu}, \quad J_2 = p_\mu^\mu p_\nu^\nu K_{1\mu\nu}, \quad J_3 = n^\mu n_\nu K_{1\mu\nu}, \quad J_4 = (n^\mu p_\nu^\nu + n^\nu p_\mu^\mu) K_{1\mu\nu} \quad (13)$$

Величина $K_{1\mu\nu}$ пропорциональна проинтегрированному по всем конечным состояниям, кроме частоты, сечению рассеяния произвольно поляризованного фотона на электроне, причём квадрат массы начального фотона есть $-\Delta^2$. Такая величина может быть использована для расчёта сечений ряда процессов: комптон-эффект поляризованного фотона в произвольной системе отсчёта, тормозное излучение при рассеянии электрона на заряженной частице и т.д.

3. В этой статье мы ограничимся рассмотрением случая,

когда один из фотонов является мягким, т.е. его энергия много меньше энергии начального электрона. Без ограничения общности можно считать, что мягким является фотон с импульсом k_2 , т.е.

$$\omega_2 \ll \varepsilon \quad (14)$$

Как известно, в этом случае можно пренеоречь отдачей электрона при излучении фотона 2, так что кинематика процесса становится такой же как для однократного тормозного излучения. Запишем некоторые полезные для дальнейшего кинематического равенства

$$(\Delta p_2) = \frac{\Delta^2}{2}, \quad x_3 = -(\Delta p_2) - \frac{\Delta^2}{2} \quad (15)$$

Вероятность излучения классического фотона входит в сечение процесса мультипликативно, так что при выполнении условия (14) тензор $N_2^{\mu\nu}$ приобретает вид

$$\frac{d}{2\pi^2} N_2^{\mu\nu} \frac{d^3k_2}{2\omega_2} = \Gamma^{\mu\nu} dW(k_2) \quad (16)$$

здесь $dW(k_2)$ есть вероятность излучения классического фотона, равная

$$dW(k_2) = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{d\omega_2}{2\omega_2} \left[\frac{p_2}{(p_2 k_2)} - \frac{p_4}{(p_4 k_2)} \right]^2 \omega_2^2 d\Omega_2 \quad (17)$$

а $\Gamma^{\mu\nu}$ обычный тензор тока при рассеянии электрона

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ g^{\mu\nu} [2 + (p_2 p_4)] - (p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu}) \right\} \quad (18)$$

Подставляя $N_2^{\mu\nu}$ в (10) и выполняя интегрирование получаем следующее выражение для $K_2^{\mu\nu}$:

$$K_2^{\mu\nu} = - \left[g^{\mu\nu} \frac{\Delta^2}{2} + 2p_2^\mu p_2^\nu - p_2^{\mu\nu} \Delta - p_2^\nu \Delta^\mu \right] / 4\pi \Phi\left(\frac{\Delta^2}{4}\right) \frac{\delta(\Delta_0 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_4} \quad (19)$$

где $\Phi(x^2)$ - функция, часто встречающаяся в теории излучения классических фотонов [1].

$$\Phi(x^2) = \frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - 1 \quad (20)$$

Для дальнейшего необходимо фиксировать систему координат. В соответствии с постановкой вопроса нас интересует сечение двойного тормозного излучения в системе центра инерции сталкивающихся частиц. При этом вектор n_μ определяется равенством:

$$n_\mu = \frac{P_{1\mu} + P_{2\mu}}{2\varepsilon} \quad (21)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ - энергия начальных частиц.

Выражая с помощью (21) вектор $P_{2\mu}$ через вектора $P_{1\mu}$ и n_μ и подставляя в (19) получим:

$$K_2^{\mu\nu} = - \left[g^{\mu\nu} \frac{\Delta^2}{2} + 2p_1^\mu p_1^\nu + 8\varepsilon^2 n^\mu n^\nu - 4\varepsilon (n^\mu p_1^\nu + n^\nu p_1^\mu) - (p_2^\mu \Delta^\nu + p_2^\nu \Delta^\mu) \right] 4\pi \Phi\left(\frac{\Delta^2}{4}\right) \frac{\delta(\Delta_0 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_4} \quad (22)$$

Сворачивая этот тензор с тензором $K_{\mu\nu}$ находим следующее выражение для сечения:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{4\alpha^4}{(2\pi)^3 p\varepsilon} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \int \frac{d^4\Delta}{\Delta^4} \left[-\frac{\Delta^2}{2} \mathcal{I}_1 - 2\mathcal{I}_2 - 8\varepsilon^2 \mathcal{I}_3 + 4\varepsilon \mathcal{I}_4 \right] \times \frac{\delta(\Delta_0 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_4} \Phi\left(\frac{\Delta^2}{4}\right) \quad (23)$$

где \mathcal{I}_m - величины, определяемые формулами (13).

Ввиду азимутальной симметрии задачи величины \mathcal{I}_m есть функции Δ^2 , Δ_z , Δ_0 , где ось z направлена по скорости начального электрона p_1 . Мы можем в общем виде выполнить интегрирование по азимутальному углу φ и

z - составляющей вектора Δ_μ . В результате имеем:

$$d\Omega_{\omega_1 \omega_2} = \frac{\omega^4}{(2\pi)^2 \rho^2 \varepsilon^2} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1 \omega_2} \int \frac{d\alpha d\Delta^2}{\Delta^4} \left[-\frac{\Delta^2}{2} J_1 - 2J_2 - 8\varepsilon^2 J_3 + 4\varepsilon J_4 \right] \Phi\left(\frac{\Delta^2}{24}\right)$$

здесь $\alpha = 2\varepsilon\Delta_0$. Нетрудно видеть, что $\alpha = \alpha_3$, действительно

$$\alpha_3 = -(\kappa_1 \rho_3) = -(\Delta p_1) - (\Delta p_2) = 2\varepsilon\Delta_0 \quad (25)$$

Определим область интегрирования по переменным α , Δ^2 . Из первого из соотношений (15) непосредственно следует

$$\Delta^2 + \alpha \leq 2\rho |\vec{\Delta}| \quad (26)$$

$$(\rho = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|)$$

откуда возводя в квадрат находим

$$\Delta^4 + 2(\alpha - 2\rho^2)\Delta^2 + \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} \leq 0 \quad (27)$$

Аналогично из второго из соотношений (15) получаем

$$\alpha^2 - 2\alpha\omega_1\varepsilon_3 + \omega_1^2 \geq 0 \quad (28)$$

Это означает, что переменная α изменяется в интервале

$$\alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_в \quad (29)$$

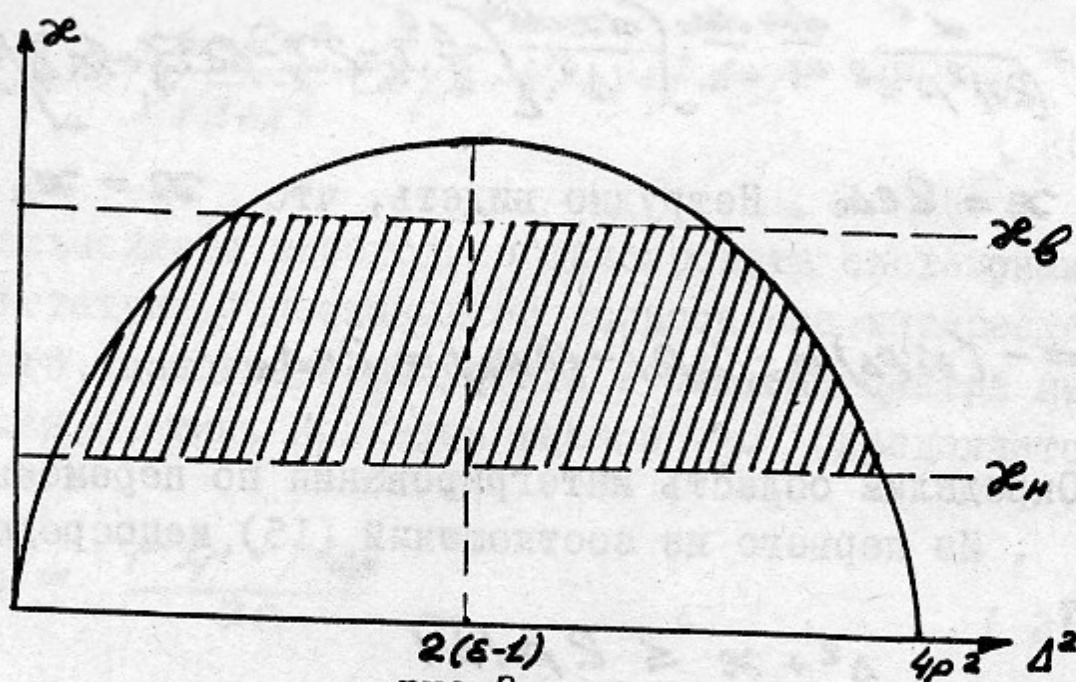
где

$$\alpha_n = \varepsilon^2 \xi \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^4(1-\xi)}} \right]$$

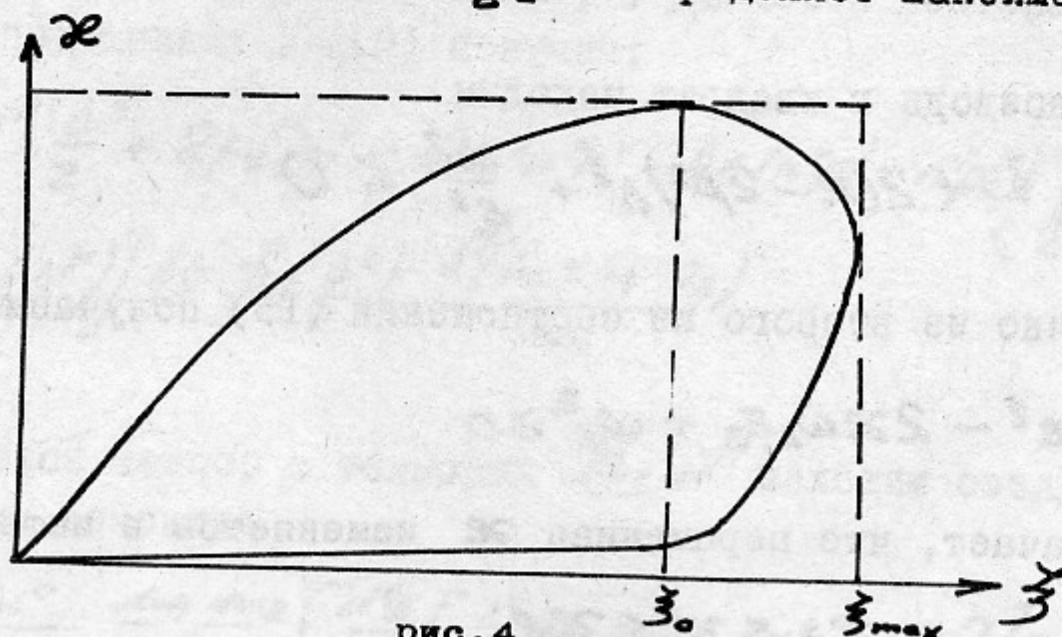
$$\alpha_в = \varepsilon^2 \xi \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^4(1-\xi)}} \right] \quad (30)$$

здесь введено часто используемое ниже обозначение $\xi = \frac{\omega_1}{\omega}$.

Область интегрирования изображена на рис.3. Она ограничена гиперболой (27) и прямыми $x = x_n$ и $x = x_b$.



Зависимость пределов x_n , x_b от величины ξ приведена на рис.4. Величина $\xi_{max} = 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$ определяет максимальную



энергию кванта K_2 , при этом конечные частицы летят с равными энергиями в одном и том же направлении - противоположном направлению вылета фотона. При значении $\xi = \xi_0 = 2 \frac{\epsilon-1}{\epsilon^2-1}$ происходит максимальная передача энергии $x_b = x_{max} = 2\epsilon(\epsilon-1)$, так что электрон, излучивший жёсткий квант, в конечном состоянии покоится.

4. Перейдем к вычислению интегралов \mathcal{I}_m (формула (13)).

Используя определение тензора $K_{\lambda\mu\nu}$ (10) и находя соответствующие свертки с тензором $N_{\lambda\mu\nu}$ легко видеть, что они зависят только от величин $\alpha_1, \alpha_3, \Delta^2, \omega_1$ и ϵ . Из них при вычислении интегралов по конечным состояниям (10) переменной является только величина α_1 , входящая степенным образом. Поэтому интегрирование сводится к отысканию следующих четырех интегралов

$$I_n = \int \alpha_1^n \delta(p_1 + \Delta - p_3 - k_1) \frac{d^3 p_3 \omega_1^2 d\Omega_1}{\epsilon^3} \quad (31)$$

$$n = 1, 0, -1, -2$$

Вычисление этих интегралов проще всего провести в системе центра инерции электрона p_3 и фотона k_1 . Указанная система определяется 4-вектором $Q_\mu = p_{3\mu} + \Delta_\mu$, причём все величины, необходимые для преобразования к этой системе, легко выражаются через этот вектор.

В результате получаем для I_n следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi^{\frac{1}{2}} \frac{P}{Q^{\frac{1}{2}}} & , & \quad I_0 = 2\pi^{\frac{1}{2}} \frac{1}{Q^{\frac{1}{2}}} \\ I_{-1} &= 2\pi^{\frac{1}{2}} \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} & , & \quad I_{-2} = 2\pi^{\frac{1}{2}} \frac{P}{R^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$Q = \left(1 - \frac{\alpha}{2\epsilon^2}\right)^2 - \frac{1}{\epsilon^2} \quad (33)$$

$$P = f + g\alpha + h\alpha^2$$

$$f = \frac{1}{2}\Delta^2, \quad g = 1 - \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2}\right) \left(1 + \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2}\right), \quad h = -\frac{1}{2\epsilon^2} \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2}\right)$$

$$R = a + b\alpha + c\alpha^2$$

$$a = \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4\epsilon^2}\right), \quad b = -\Delta^2 \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2} \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2}\right), \quad c = \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2}\right) \quad (34)$$

Приведены явные выражения для J_m через интегралы I_n :

$$J_1 = -\frac{1}{2}I_1 - \frac{I_0}{2x^2} \left[1 + 2x - \Delta^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{I_{-2}}{2x} \left[2 + 2x - x^2 - \Delta^2 \left(x + \frac{\Delta^2}{2} \right) \right] - \left(1 - \frac{\Delta^2}{2} \right) I_{-2} \quad (35)$$

$$J_2 = \left(1 + \frac{1}{2x} \right) I_1 + \frac{I_0}{2x^2} \left[1 + 3x + x^2 - x^3 + \frac{\Delta^2}{4} (1 + 2x - 2x^2) \right] - \frac{I_{-2}}{2x} \left[4 + 8x + 3x^2 + 3\Delta^2 (1 + x) + \frac{\Delta^4}{2} \right] + \left(1 + x + \frac{\Delta^2}{4} \right) I_{-2} \quad (36)$$

$$J_3 = \frac{I_1}{2x} + \frac{I_0}{2x^2} \left[2\varepsilon^2 + x - x^2 (1 - \frac{1}{3}) - \Delta^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) - \frac{x^3}{2\varepsilon^2} \right] - \frac{I_{-2}}{2x} \left\{ 4\varepsilon^2 (1 - \frac{1}{3}) + x(2 - \frac{1}{3}) + \Delta^2 \left[\varepsilon^2 + \varepsilon^2 (1 - \frac{1}{3})^2 - 1 - \frac{1}{2} x \frac{1}{3} \right] - \frac{\Delta^4}{2} \right\} + \frac{I_{-2}}{2} \left[2\varepsilon^2 (1 - \frac{1}{3})^2 + x(1 - \frac{1}{3}) - \frac{\Delta^2}{2} \right] \quad (37)$$

$$J_4 = \varepsilon \left\{ \frac{I_1}{2x} \left(1 + \frac{x}{2\varepsilon^2} \right) + \frac{I_0}{2x^2} \left[2 + 3x - x^2 (1 - \frac{1}{3}) - \frac{\Delta^2}{2} x (1 + \frac{1}{3}) - \frac{x}{2\varepsilon^2} (2x^2 - 1 + \frac{x\Delta^2}{2}) \right] - \frac{I_{-2}}{2x} \left[2 + x + (1 - \frac{1}{3})(2 + 3x) + \frac{\Delta^2}{2} (4 + x - x\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \frac{\Delta^4}{4} + \frac{1}{2\varepsilon^2} (2x^2 + 2x + x\Delta^2) \right] + I_{-2} \left[(1 - \frac{1}{3})(2 + x) - \frac{1}{3} \frac{\Delta^2}{2} + \frac{x}{2\varepsilon^2} \right] \right\} \quad (38)$$

5. Написанные выражения являются точными. В дальнейших вычислениях мы будем использовать ультрарелятивизм сталкивающихся частиц, т.е. малость параметра ε^{-2} . Это приближение является последовательным, т.к. отброшенные диаграммы дают вклад именно такого порядка (см. пункт 2). В дальнейшем анализе мы будем также считать, что величины $1 - \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$ не

являются малыми по параметру ε^{-1} . Тогда нетрудно видеть, что наибольший вклад в сечение даёт величина \mathcal{T}_3 . Действительно, она содержит члены порядка ε^2 (37) и входит в выражение (24) с множителем ε^2 . Как мы увидим дальше интегрирование по переменным Δ^2 и \mathcal{X} не вносит дополнительных степеней ε , поэтому сечение двойного тормозного излучения определяется именно этими членами. Это означает, что наиболее существенны в тензорах $K_{\mu\nu}$ и $K_2^{\mu\nu}$ слагаемые, содержащие максимальное число векторов n_μ , т.е. "наименее ковариантные члены". В самом деле, свертки тензора $K_{\mu\nu}$ с $g^{\mu\nu}$ и вектором p_2^μ дают величины порядка единицы, в то время как свертки $K_{\mu\nu}$ с вектором n_μ могут дать члены вида $(n p_2)$ и $(n k_2)$, порядок которых $-\varepsilon$.

Величины \mathcal{T}_3 и \mathcal{T}_2 имеют прозрачный физический смысл. Величина \mathcal{T}_3 является 00-компонентной тензора $K_{\mu\nu}$, т.е. компонентной, входящей в сечение тормозного излучения электрона на кулоновском центре. Величина \mathcal{T}_2 входит в сечение рассеяния неполяризованного фотона с массой $-\Delta^2$ на электро-не. Нетрудно проверить, что между этими величинами существует простая связь

$$\mathcal{T}_3(\Delta^2) = \Delta^2 \frac{\varepsilon^2}{2\mathcal{X}^2} \mathcal{T}_2(\Delta^2=0) + O(\Delta^4, \varepsilon^{-2}) \quad (39)$$

Причём $\mathcal{T}_2(\Delta^2=0)$ определяет сечение комптон-эффекта для реального фотона. Соотношение (39) составляет основу метода Вейцекера-Вильямса, который фактически используется для вычисления проинтегрированного по углам сечения однократного тормозного излучения. Как выяснится в дальнейшем, для расчёта сечения двойного тормозного излучения метод Вейцекера-Вильямса неприменим.

6. Полученные выражения позволяют сравнительно просто получить дифференциальное сечение $d\sigma_\omega$ однократного тормозного излучения. Для этого достаточно в правой части формулы

(16) опустить множитель $dW(\kappa_2)$. Тогда выражение для сечения $d\sigma_\omega$ принимает вид:

$$d\sigma_\omega = \frac{\alpha^3}{8\pi\rho^2\varepsilon^2} \frac{d\omega}{\omega} \int \frac{d\kappa d\Delta^2}{\Delta^4} \left[-\frac{\Delta^2}{2} \mathcal{J}_1 - 2\mathcal{J}_2 - 8\varepsilon^2 \mathcal{J}_3 + 4\varepsilon \mathcal{J}_4 \right] \quad (40)$$

Здесь мы вычислим сечение $d\sigma_\omega$ с логарифмической точностью. Нижний предел интегрирования по Δ^2 имеет порядок ε^{-4} и в интеграле в формуле (40) существенны малые Δ^2 . Следовательно выражения для \mathcal{J}_m можно разложить по степеням Δ^2 и ограничиться нулевым и первым членами разложения. Величина в квадратных скобках в интеграле (40) содержит члены порядка ε^4 , ε^2 , 1 и т.д. При $\Delta^2=0$ члены порядка ε^4 и ε^2 взаимно уничтожаются. Интегрирование оставшихся членов даёт вклад

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \int \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} \approx \frac{1}{\varepsilon^4 \Delta_{min}^2} \sim 1 \quad (41)$$

т.е. величину не содержащую большого логарифма. Такой логарифм возникает при интегрировании первого члена разложения по Δ^2 . При этом в интеграле (40) достаточно ограничиться членами порядка ε^4 . Нетрудно видеть, что такие члены возникают только при разложении \mathcal{J}_3 . Используя формулу (39) получаем:

$$d\sigma_\omega = \alpha^3 \frac{d\omega}{\omega} \int \frac{d\Delta^2}{\Delta^2} \frac{d\kappa}{\kappa^2} \left[1 - \frac{\kappa}{1-\kappa} + \frac{1}{1-\kappa} - 2 \frac{\kappa}{\kappa(1-\kappa)} + \frac{\kappa^2}{\kappa^2(1-\kappa)^2} \right] \quad (42)$$

Нижние пределы интегрирования по Δ^2 и κ определяются соотношениями (27), (29) и приближенно равны

$$\kappa_H = \frac{\kappa}{2(1-\kappa)}, \quad \Delta_{min}^2 = \frac{\kappa^2}{4\varepsilon^4} \quad (43)$$

здесь отброшены члены более высокого порядка по ε^{-2} . Верхний предел интегрирования по Δ^2 определяется условием при-

менимости разложения, что даёт $\Delta_{\max}^2 \sim 1$. Поскольку интегралы по x сходятся, верхний предел интегрирования по x вообще несущественен. По этой же причине при интегрировании с логарифмической точностью в выражении для Δ_{\min}^2 величину x можно заменить на x_n . Выполняя интегрирование получаем главный (логарифмический) вклад в сечение однократного тормозного излучения:

$$d\sigma_{\omega} = 4z_0^2 \alpha \frac{d\omega}{\omega} \frac{\epsilon - \omega}{\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{\epsilon - \omega} + \frac{\epsilon - \omega}{\epsilon} - \frac{2}{3} \right] \ln \frac{4\epsilon^2(\epsilon - \omega)}{\omega} \quad (44)$$

Следует иметь в виду, что полученное выражение даёт сечение излучения одной из частиц. Именно это сечение измеряется, если в опытах на встречных пучках изучать однократное тормозное излучение в одну сторону. Ввиду указанной выше малости интерференционных членов, полное сечение однократного тормозного излучения равняется удвоенному выражению (44). Этот результат совпадает с логарифмической частью сечения однократного тормозного излучения, полученного в работе [2].

Заметим, что сечение (44) по форме совпадает с, вычисленным с помощью метода Вейцзекера-Вильямса, сечением однократного тормозного излучения на покоящемся электроны за исключением аргумента логарифма, который получается путем элементарного релятивистского пересчёта.

Для получения нелогарифмических членов, проведенное выше разложение не годится и интегрирование по Δ^2 должно быть проведено точно. При этом, как видно из оценки (41), необходимо учитывать часть опущенных здесь членов, что делает расчёт более громоздким.

7. Перейдем к вычислению дифференциального $d\sigma_{\omega, \omega_2}$ сечения двойного тормозного излучения (24). По сравнению со случаем однократного тормозного излучения подинтегральная функция содержит дополнительный множитель $\Phi\left(\frac{\Delta^2}{4}\right)$. Эта фун-

кция ведет себя при малых и больших значениях аргумента следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x^2) &\approx \frac{4}{3} x^2 & x \ll 1 \\ \bar{\Phi}(x^2) &\approx \ln x^2 & x \gg 1 \end{aligned} \quad (45)$$

Это означает, что в интеграле (24) не существенны малые Δ^2 . Действительно, при $\Delta^2 \rightarrow 0$ квадратная скобка в этом интеграле обращается в независящую от Δ^2 величину порядка единицы (см. предыдущий пункт), поэтому интеграл по области малых Δ^2 есть

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \int \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} \Delta^2 \sim \frac{1}{\varepsilon^4} \ln \frac{1}{\Delta_{\min}^2} \quad (46)$$

и, следовательно, даёт пренебрежимо малый вклад (ср. (41)). Учёт следующего члена разложения по Δ^2 приводит к интегралу типа

$$\int \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} \Delta^2 \bar{\Phi}\left(\frac{\Delta^2}{4}\right) \quad (47)$$

Этот интеграл сходится при малых Δ^2 , а при больших Δ^2 ведет себя как $\ln^2(\Delta)$. Таким образом, в отличие от случая однократного тормозного излучения, нижний предел интегрирования по Δ^2 здесь несущественен и при вычислении интеграла (24) нельзя пользоваться разложением по Δ^2 . Эта ситуация возникает всегда при излучении двух фотонов. Значит метод Вейцекера-Вильямса неприменим к таким задачам.

Согласно сказанному выше интегрирование по Δ^2 должно быть проведено точно. Выделяя в формулах (24) и (37) старшие по ε^2 члены получаем

$$d\sigma_{\omega_1, \omega_2} = \frac{4\alpha^4}{(2\pi)^2} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \int \frac{dx d\Delta^2}{\Delta^4} \left[-\frac{2I_0}{x^2} + \frac{4(1-\xi) + \Delta^2[1+(1-\xi)^2]}{x} I_{-1} - 2(1-\xi)^2 I_{-2} \right] \quad (48)$$

Причём в этом приближении

$$I_0 = 2\pi\xi \quad (49)$$

$$I_{-1} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{x^2(1-\xi)^2 - x\Delta^2\xi(1-\xi) + \xi^2\Delta^2(1 + \frac{\Delta^2}{4})}} \quad (50)$$

$$I_{-2} = \frac{2\pi\xi \left[\xi \frac{\Delta^2}{2} + (1-\xi)x \right]}{\left[x^2(1-\xi)^2 - x\Delta^2\xi(1-\xi) + \xi^2\Delta^2(1 + \frac{\Delta^2}{4}) \right]^{3/2}} \quad (51)$$

Проведем интегрирование x . Нижний предел в этом интегрировании определяется формулой (43). Верхний предел (см. рис. 3) по разному зависит от Δ^2 в разных областях. Однако как показывает проведенный строгий анализ верхний предел интегрирования по x оказывается вообще не существенным и интегрирование может быть распространено до бесконечности. В результате получаем

$$d\sigma_{\omega_1, \omega_2} = \frac{8z_0^2\alpha^2}{\pi} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \int \frac{dx}{x^3} \Phi(x^2) \left[\Phi(x^2) \left(1 - \frac{\omega_1}{\varepsilon} \right) + \frac{\omega_1^2 x}{\varepsilon^2 \sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] \quad (52)$$

При $\omega_1 \ll \varepsilon$ формула (52) принимает вид:

$$d\sigma_{\omega_1, \omega_2} = \frac{8z_0^2\alpha^2}{\pi} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \int \frac{dx}{x^3} \Phi(x^2) \quad (53)$$

Это выражение совпадает в полученной ранее авторами [1]

формулой для сечения тормозного излучения двух классических фотонов в приближении классических токов. Мы видим, что выражение в квадратных скобках в формуле (52) с точностью до коэффициента можно рассматривать как обобщение вероятности излучения фотона при столкновении с передачей импульса $\Delta^2 = \epsilon^2 x^2$ на случай излучения жёстких фотонов.

В интеграле (52) существенная область $x \sim 1$, поэтому верхний предел интегрирования по x можно устремить к бесконечности. Теперь видно, что интегрирование по x даёт только число и тем самым не меняет порядка величины членов по ϵ (см. пункт 5). Выполняя интегрирование получаем следующее окончательное выражение для сечения двойного тормозного излучения:

$$d\sigma_{\omega_1, \omega_2} = \frac{8z_0^2 \alpha^2}{\pi} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1 \omega_2} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_1}{\epsilon}\right) \left[\frac{5}{4} + \frac{7}{8} \zeta(3) \right] + \frac{\omega_1^2}{\epsilon^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{7}{8} \zeta(3) \right] \right\} \quad (54)$$

Здесь $\zeta(m)$ - дзета-функция Римана, $\zeta(3) \frac{7}{8} = 1,052$.

При $\omega_1 \ll \epsilon$ это выражение переходит в формулу (22) работы [1], в которой численный коэффициент является неправильным и должен быть уменьшен в 4 раза.

8. Определим порядок величины отброшенных членов в формуле (54). Эти поправочные члены возникают от учёта следующих по ϵ^{-2} членов в исходной формуле (24) и от вкладов отброшенных диаграмм. Наиболее простой является оценка отброшенных членов для случая мягких квантов ($\omega \ll \epsilon$). В этом случае можно использовать приближение классических токов и выражение для сечения принимает вид

$$d\sigma = \int \sigma_{e0} \frac{\epsilon}{2!} dW_e(k_1) dW_e(k_2) \quad (55)$$

где σ_{e0} - сечение рассеяния электронов, определяемое формулой Меллера. Формула (55) учитывает вклад всех диаграмм. Пользуясь явным выражением для $dW_e(k)$ (см. [1]) легко показать, что максимальные поправочные члены даются областью больших

Δ^2 ($\Delta^2 \sim \epsilon^2$). При таких Δ^2 вклад различных диаграмм становится одного порядка. Вероятность излучения фотона при больших Δ^2 равна

$$\frac{4\pi}{3} \ln(\Delta) \frac{d\omega}{\omega} \quad (56)$$

Главный член в формуле Меллера $\frac{d\Delta^2}{\Delta^4}$ дал наш основной результат, наибольший из оставшихся членов $\frac{d\Delta^2}{\epsilon^2 \Delta^2}$ приводит к следующей поправке к сечению

$$\delta\sigma \sim z_0^2 \alpha^2 \int \frac{d\Delta^2}{\epsilon^2 \Delta^2} \ln^2 \Delta \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1 \omega_2} \sim z_0^2 \alpha^2 \frac{\ln^3 \epsilon}{\epsilon^2} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1 \omega_2} \quad (57)$$

Другие члены дают выражения, отличающиеся от (57) меньшей степенью $\ln \epsilon$. Что касается малых Δ^2 , то эта область даёт поправку $\sim \epsilon^{-2}$, что связано с тем, что вероятность излучения при рассеянии на малый угол не содержит логарифмов, а вероятность излучения в направлении противоположном движению частиц $\sim \epsilon^{-2}$.

Поправка аналогичная (57) возникает также и в случае излучения жёстких фотонов. При энергии электронов 50 Мэв она составляет 2-3% и быстро падает с ростом энергии.

Проведенное выше рассмотрение не касалось самой жёсткой части спектра, где $\epsilon - \omega \sim 1$. Эта область требует специального рассмотрения. Поправки к формуле (54) для такого случая повидимому отличаются от (57) множителем $\epsilon / \epsilon - \omega$, который велик для самой жесткой части спектра. Ввиду узости этой области, интегральный вклад вносимый ею видимо мал. Более подробное рассмотрение этого вопроса будет проведено в дальнейшем.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. V.N.Bayer and V.M.Galitsky Physics Letters, 13, 355, 1964
2. G.Altarelli, F.Buccella Nuovo Cimento, 34, 1337, 1964

Ответственный за выпуск В.А.Хозе

Подписано к печати *МНО7068 9.4.65*

Тираж **200**

Отпечатано на ротапринтере ИЯФ СО АН С С С Р